УДК 514.116

Л.П. Мироненко
Донецкий национальный технический университет, Украина

Тригогиперболические функции и их алгебраические свойства (I)

Материалы статьи носят научно-исследовательский характер в области теории функций и предлагают альтернативный вариант системы независимых функций, которые, возможно, дополнят систему тригонометрических и гиперболических функций. Новые функции взаимно однозначно выражаются через обычные тригонометрические и гиперболические функции и поэтому названы тригогиперболическими функциями. Получены соотношения между новыми функциями, а также между новыми и традиционными функциями. Необычность этих соотношений делает теорию довольно сложной, но перспективной.

Хорошо известно, что функции синус и косинус могут быть представлены абсолютно и равномерно сходящимися на всей вещественной оси степенными рядами [1-3]. Эти ряды являются знакочередующимися. Другими словами, каждая из функций состоит из пары сходящихся рядов противоположного знака. Каждый ряд сходится к некоторой, как следует из их разложений, аналитической функции. На основании такого разделения рядов для синуса и косинуса на две пары рядов (всего четыре ряда) можно ввести четыре аналитические функции. Так возникает единый базис для тригонометрии обычной и гиперболической со своими, назовем, «тригогиперболическими» соотношениями и свойствами.

Представления тригонометрических и гиперболических функций через новые, непериодические, функции является, по сути, упрощением элементарных функций синуса и косинуса и служит базисом для практической работы с обычными тригонометрическими и гиперболическими функциями, а также с экспоненциальной функцией. Получив ряд соотношений между новыми базисными четырьмя функциями, можно работать как с новым набором функций, так и с обычным набором (синус, косинус, гиперболическими синус и косинус). С каким набором функций работать удобно, определяется постановкой решаемой задачи.

1 Определения тригогиперболических функций и основные обозначения

Запишем стандартные степенные ряды

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5.}{5!} + .. + = \sum_{b=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + = \sum_{b=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned} \tag{1}$$

Разбиваем каждый их этих рядов на два знакопостоянных ряда и введем обозначения

$$six = x + \frac{x^5.}{5!} + \frac{x^9.}{9!} + ... = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!},$$
$$inx = \frac{x^3.}{3} + \frac{x^7.}{7!} + \frac{x^{11}.}{11!} + ... = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!},$$
$$cox = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + ... = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$
$$osx = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} .... = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n)!}. \quad (2)$$

В дальнейшем будем эти функции называть соответственно six «си-функция», inx «инус», cox «ко-функция» и osx «осинус», а всю совокупность six, inx, cox, osx – тригогиперболическими функциями.

Согласно определениям

$$\sin x = six - inx,$$
$$\cos x = cox - osx. \quad (3)$$

Сравним ряды для гиперболических функций shx, chx и функции e^x с определениями тригогиперболических функций (2)

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5.}{5!} + ..+ = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...+ = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.,$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3.}{3!} + ...+ = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Находим следующие равенства

$$shx = six + inx,$$
$$chx = cox + osx, \quad (4)$$
$$e^x = six + inx + cox + osx.$$

Графики введенных функций представлены на рис. 1, а разности $\sin x = six - inx$, $\cos x = cox - osx$ и суммы $shx = six + inx$, $chx = cox + osx$ – на рис. 2 и 3.

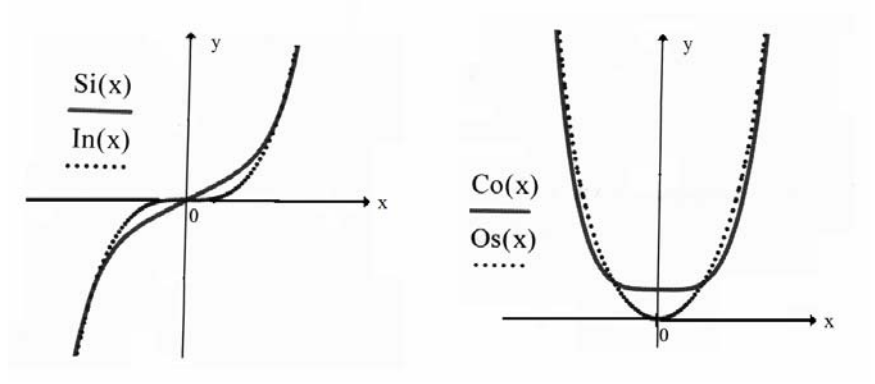


Рисунок 1 – Графики функций $y = six$ и $y = inx$, функций $y = cox$ и $y = osx$

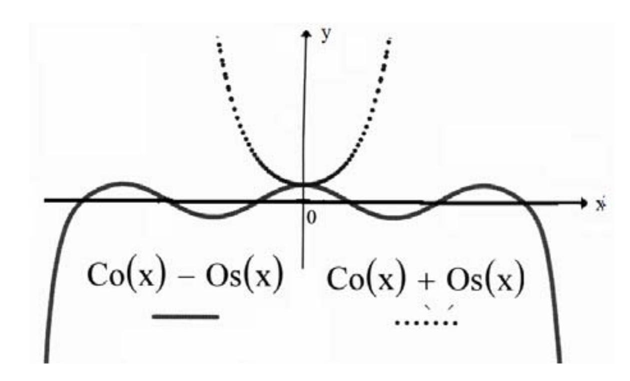


Рисунок 2 – Графики функций $y = cox - osx = \cos x$ и $y = cox + osx = chx$

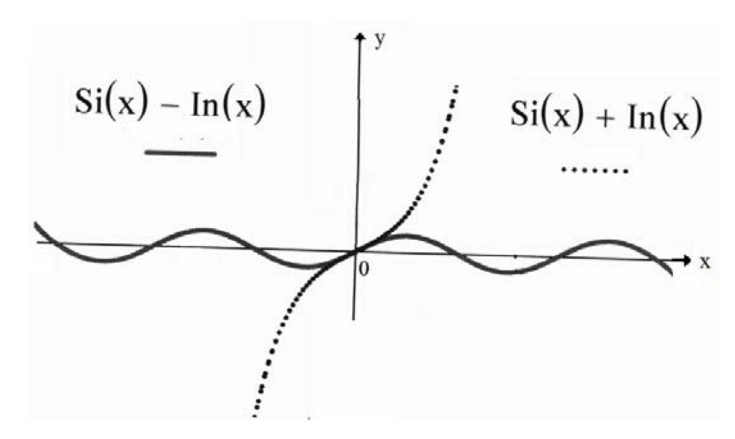


Рисунок 3 – Графики функций $y = six - inx = \sin x$ и $y = six + inx = shx$

Свойства симметрии функций six, inx, cox, osx

$$\begin{gathered} si(-x) = -six,, in(-x) = -inx, \\ co(-x) = cox,, os(-x) = cox. \end{gathered} \quad (5)$$

Запишем нули функции $y = \sin x$: $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z$. Поскольку $\sin x = six - inx$, то $si(\pi n) = in(\pi n), n \in Z$. Аналогично, $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Поскольку $\cos x = cox - osx$, то $co\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = os\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$. Теперь рассмотрим значения $\sin x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Откуда следует, что $si\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - in\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \pm 1$. Если $\cos x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\pi + 2\pi n, n \in Z$. Откуда следует, что $co\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = os\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.

Итак,

$$\begin{aligned} & si(\pi n) = in(\pi n), co\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = os\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), \\ & co(\pm\pi + 2\pi n) - os(\pm\pi + 2\pi n) = \pm 1, \\ & si\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - in\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \pm 1, n \in Z. \end{aligned}$$

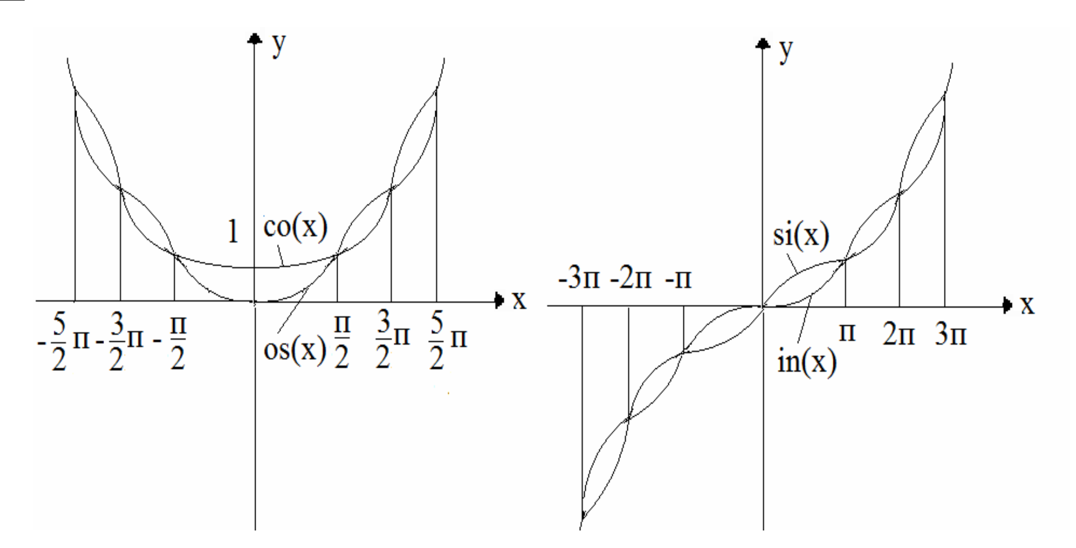


Рисунок 4 – Более детальное поведение тригогиперболических функций в окрестности точек $x = \pi n, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Выразим тригогиперболические функции через обычные тригонометрические и гиперболические, комбинируя равенства (3) и (4)

$$
\begin{aligned}
six &= \frac{1}{2}(\sin x + shx), \\
inx &= \frac{1}{2}(-\sin x + shx), \\
cox &= \frac{1}{2}(\cos x + chx), \\
osx &= \frac{1}{2}(-\cos x + chx).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Сразу обратим внимание на тот факт, что мы имеем дело с двумя независимыми наборами функций six, inx, cox, osx и $\sin x, \cos x, shx, chx$ (или, что эквивалентно набору $\sin x, \cos x,\ e^{x}, e^{-x}$), переход от одного набора к другому производится по формулам (3), (4) и (6).

2 Основные соотношения для функций *six, inx, cox, osx*

Выведем ряд соотношений, связывающих тригогиперболические функции six, inx, cox, osx с обычными тригонометрическими и гиперболическими функциями $\sin x \cdot shx = (six - inx)(six + inx) = si^2 x - in^2 x;$ $\cos x \cdot chx = (cox - osx)(cox + osx) = co^2 x - os^2 x.$ Откуда,

$$
\begin{aligned}
si^2 x - in^2 x &= \sin x \cdot shx, \\
co^2 x - os^2 x &= \cos x \cdot chx.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Отсюда следует формула

$$si^2 x - in^2 x + co^2 x - os^2 x = \sin x \cdot shx + \cos x \cdot chx.$$

Используя формулы (6), найдем

$$six\cdot osx - inx\cdot cox = \frac{1}{4}((\sin x + shx)(-\cos x + chx) - (-\sin x + shx)(\cos x + chx)) =$$

$$= \frac{1}{2}((\sin x\cdot chx - \cos xs\cdot hx).$$

Кратко

$$2(six\cdot osx - inx\cdot cox) = \sin x\cdot chx - \cos x\cdot shx.$$

Используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 s = 1$

$$(six - inx)^2 + (cox - osx)^2 = 1,\ si^2x + in^2x + co^2x + os^2x - 2sixinx - 2coxosx = 1.$$

Аналогично используем основное «гиперболическое тождество» $ch^2x - sh^2x = 1$

$$cox + osx)^2 - (six + inx)^2 = 1,\ co^2x + os^2x - si^2x - in^2x + 2coxosx - 2sixinx. = 1,$$

В результате имеем пару соотношений

$$\begin{aligned} co^2x + os^2x + si^2x + in^2x &= 1 + 2(six\cdot inx + cox\cdot osx),\\ co^2x + os^2x - si^2x - in^2x &= 1 + 2(six\cdot inx - cox\cdot osx). \end{aligned} \tag{8}$$

Складывая и вычитая полученные равенства, получим

$$\begin{aligned} co^2x + os^2x &= 1 + 2six\cdot inx,\\ si^2x + in^2x &= 2cox\cdot osx. \end{aligned} \tag{9}$$

Используем формулы двойных аргументов $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и $sh2x = 2shx\cdot chx$

$$\sin 2x = si2x - in2x = 2(six - inx)(cox - osx) = 2six\,cox + 2inx\,osx - 2six\,osx - 2nx\,cox,$$
$$sh2x = si2x + in2x = 2(six + inx)(cox + osx) = 2six\,cox + 2inx\,osx + 2six\,osx + 2nx\,cox,$$

$$\begin{aligned} si2x &= 2(six\cdot cox + inx\cdot osx),\\ in2x &= 2(six\cdot osx + inx\cdot cox). \end{aligned} \tag{10}$$

Проверим результат

$$si2x - in2x = 2(six\cdot cox - six\cdot osx + inx\cdot osx - inx\cdot cox) = 2(six\,(cox - osx) + inx(osx - cox)) =$$
$$= 2(six\cos x - inx\cos x) = 2(six - inx)\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

Аналогично проверяется равенство $si2x + in2x = sh2x$.
Используем формулы двойных аргументов $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и $ch2x = ch^2 2x + sh^2 2x$

$$\cos 2x = co2x - os2x = (cox - osx)^2 - (six - inx)^2 = co^2x + os^2 - si^2x - in^2x - 2coxosx + 2sixinx,$$
$$ch2x = co2x + os2x = (cox + osx)^2 + (six + inx)^2 = co^2x + os^2 + si^2x + in^2x + 2coxosx + 2sixinx,$$

$$\begin{aligned} co2x &= co^2x + os^2 + 2six\cdot inx,\\ os2x &= si^2x + in^2x + 2cox\cdot osx. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Подставив формулы (9), получим более простые выражения

$$\begin{aligned} co2x &= 1 + 4six\cdot inx,\\ os2x &= 4cox\cdot osx. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Вычитая и складывая выражения, получим $\cos 2x = co2x - os2x = \cos 2x = 1 + 4six \cdot inx - 4cox \cdot osx$, $ch2x = co2x + os2x = 1 + 4six \cdot inx + 4cox \cdot osx$,

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 + 4six \cdot inx - 4cox \cdot osx, \\ ch2x &= 1 + 4six \cdot inx + 4cox \cdot osx. \end{aligned} \qquad (12)$$

Вычитая и складывая равенства, получим еще два соотношения

$$\begin{aligned} ch2x - \cos 2x - &= 8coxosx, \\ ch2x + \cos 2x - &= 2 + 8six \cdot inx. \end{aligned} \qquad (13)$$

Используем формулы понижения степени $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ и $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, подставив формулу (12):

$$\frac{1 \pm \cos 2x}{2} = \frac{1 \pm (1 + 4six \cdot inx - 4cox \cdot osx)}{2} = \begin{cases} 1 + 2six \cdot inx - 2cox \cdot osx) \\ 2(cox \cdot osx - six \cdot inx) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= 2(cox \cdot osx - six \cdot inx) \\ \cos^2 x &= 1 + 2(six \cdot inx - cox \cdot osx). \end{aligned} \qquad (14)$$

Используем формулы понижения степени $sh^2 x = \dfrac{ch2x - 1}{2}$ и $ch^2 x = \dfrac{1 + ch2x}{2}$, подставив формулу (12)

$$\frac{ch2x \pm 1}{2} = \frac{1 + 4six \cdot inx + 4cox \cdot osx \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 + 2six \cdot inx + 2cox \cdot osx, \\ 2six \cdot inx + 2cox \cdot osx. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ch^2 x &= 1 + 2six \cdot inx + 2cox \cdot osx \\ sh^2 x &= 2six \cdot inx + 2cox \cdot osx. \end{aligned} \qquad (15)$$

Найдем тригогиперболические функции для суммы и разности аргументов x и y

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = (six - inx)(coy - osy) + (cox - osx)(siy - iny) =$$
$$= sixcoy - sixosy - inxcoy + nxosy + coxsiy - osxsiy - coxiny + osxiny,$$
$$si(x + y) - in(x + y) = sixcoy + siycox - coxiny - inxcoy - osxsiy - osysix + nxosy + inyosx.$$

Аналогично, для гиперболической функции $sh(x + y)$

$$sh(x + y) = shxchy + chxshy = (six + inx)(coy + osy) + (cox + osx)(siy + iny) =$$
$$= sixcoy + sixosy + inxcoy + nxosy + coxsiy + osxsiy + coxiny + osxiny.$$

В результате получим

$$si(x + y) + in(x + y) = (sixcoy + siycox) + (coxiny + inxcoy) + (osxsiy + osysix) + nxosy + inyosx.$$

Сладывая и вычитая равенства для выражений $si(x + y) - in(x + y)$ и $si(x + y) +$, $+in(x + y)$ получим

$$\begin{aligned} si(x + y) &= six \cdot coy + siy \cdot cox + inx \cdot osy + iny \cdot osx, \\ si(x - y) &= six \cdot coy - siy \cdot cox + inx \cdot osy - iny \cdot osx, \\ in(x + y) &= cox \cdot iny + inx \cdot coy + osx \cdot siy + osy \cdot six, \\ in(x - y) &= -cox \cdot iny + inx \cdot coy - osx \cdot siy + osy \cdot six. \end{aligned} \qquad (16)$$

Легко проверить, что формулы двойных аргументов $si2x, in2x$ следуют при $x = y$ и совпадают с формулами (9).

Комбинируя в (16), получим

$$\begin{aligned} si(x+y)+si(x-y)&=2(six\cdot coy+inx\cdot osy),\\ si(x+y)-si(x-y)&=2(siy\cdot cox+iny\cdot osx),\\ in(x+y)+in(x-y)&=2(inx\cdot coy+osy\cdot six),\\ in(x+y)-in(x-y)&=2(cox\cdot iny+osx\cdot siy). \end{aligned} \tag{17}$$

Найдем тригогиперболические функции для суммы и разности аргументов для $\cos(x\pm y)$ и $ch(x\pm y)$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=(cox-osx)(coy-osy)-(six-inx)(siy-iny)=$$

$$=coxcoy-osxcoy-osycox+osxosy-sixsiy+inxsiy+sixiny-inxiny.$$

$$ch(x+y)=chxchy+shxshy=coxcoy+osxcoy+osxcoy+osxosy+sixsiy+inxsiy+sixiny+inxiny.$$

$$co(x+y)-os(x+y)=coxcoy-osxcoy-osycox+osxosy-sixsiy+inxsiy+sixiny-inxiny.$$

$$co(x+y)+os(x+y)=coxcoy+osxcoy+osxcoy+osxosy+sixsiy+inxsiy+sixiny+inxiny.$$

$$\begin{aligned} co(x+y)&=coxcoy+osxosy+inxsiy+sixiny,\\ co(x-y)&=coxcoy+osxosy-inxsiy-sixiny,\\ os(x+y)&=osxcoy+osycox+sixsiy+inxiny,\\ os(x-y)&=osxcoy+osycox-sixsiy-inxiny. \end{aligned} \tag{18}$$

Формулы двойных аргументов $co2x, os2x$ следуют при $x = y$ и совпадают с формулами (10).

$$\begin{aligned} co(x+y)+co(x-y)&=2(coxcoy+osxosy),\\ co(x+y)-co(x-y)&=2(sixiny+inxsiy),\\ os(x+y)+os(x-y)&=2(osxcoy+osycox),\\ os(x+y)-os(x-y)&=2(sixsiy+inxiny). \end{aligned} \tag{19}$$

3 Некоторые комплексные соотношения для функций *six, inx, cox, osx*

Подставив в разложения функций six, inx, cox, osx вместо переменной x переменную ix и учитывая, что $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$, получим

$$si(ix)=ix+\frac{i^5x^5.}{5!}+\frac{i^9x^9.}{9!}+...=isix,$$

$$in(ix)=\frac{i^3x^3.}{3}+\frac{i^5x^7.}{7!}+\frac{i^{11}x^{11}.}{11!}+...=-iinx,$$

$$co(ix)=1+\frac{i^4x^4}{4!}+\frac{i^7x^8}{8!}+...=cox.$$

$$os(ix)=\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^7x^6}{6!}+\frac{i^{10}x^{10}}{10!}....=-osx.$$

В результате получим соотношения для тригогиперболических функций мнимого аргумента

$$si(ix) = i \cdot six, \quad in(ix) = -i \cdot inx, \quad co(ix) = cox. \quad os(ix) = -osx. \tag{19}$$

Легко проверяются следующие равенства

$$\begin{aligned} \sin(ix) &= si(ix) - in(ix) = i(six + inx) = i \cdot shx, \\ \cos(ix) &= co(ix) - os(ix) = cox + osx = chx, \\ sh(ix) &= si(ix) + in(ix) = i(six - inx) = i \cdot \sin x, \\ ch(ix) &= co(ix) + os(ix) = cox - osx = \cos x. \end{aligned} \tag{20}$$

$$e^{ix} = si(ix) + in(ix) + co(ix) + os(ix) = i(six - inx) + cox + osx = \cos x + i \sin x.$$

Подставим эти выражения в формулы (6)

$$\begin{aligned} six &= \frac{1}{2}(shx - i \cdot sh(ux)), & six &= \frac{1}{2}(\sin x - i \cdot \sin(ix)), \\ inx &= \frac{1}{2}(shx + i \cdot sh(ux)), & inx &= -\frac{1}{2}(\sin x + i \cdot \sin(ix)), \\ cox &= \frac{1}{2}(chx + ch(ix)), & cox &= \frac{1}{2}(\cos(ix) + \cos x), \\ osx &= \frac{1}{2}(chx - ch(ix)). & osx &= \frac{1}{2}(\cos(ix) - \cos x). \end{aligned} \tag{21}$$

Запишем формулы (16) – (19) для комплексной переменной $z = x + iy$ и $z^* = x - iy$

$$\begin{aligned} si(x+iy) &= sixcoy - inxosy + i(siycox - inyosx), \\ si(x-iy) &= sixcoy - nxosy + i(inyosx - siycox), \\ in(x+iy) &= inxcoy - osysix + i(osxsiy - coxiny), \\ in(x-iy) &= inxcoy - osysix + i(coxiny - osxsiy). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} si(x+iy) + si(x-iy) &= 2(sixcoy - inxosy), \\ si(x+iy) - si(x-iy) &= 2i(siycox - inyosx), \\ in(x+iy) + in(x-iy) &= 2(inxcoy - osysix), \\ in(x+iy) - in(x-iy) &= 2i(osxsiy - coxiny). \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} co(x+iy) &= coxcoy - osxosy - i \cdot (sixiny - inxsiy), \\ co(x-iy) &= coxcoy - osxosy - i \cdot (inxsiy - sixiny), \\ os(x+y) &= osxcoy - osycox - i \cdot (sixsiy + inxiny), \\ os(x-y) &= osxcoy - osycox - i \cdot (sixsiy - inxiny). \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} co(x+iy) + co(x-iy) &= 2(coxcoy - osxosy), \\ co(x+iy) - co(x-iy) &= 2i(inxsiy - sixiny), \\ os(x+iy) + os(x-iy) &= 2(osxcoy - osycox), \\ os(x+iy) - os(x-iy) &= 2i(sixsiy - inxiny). \end{aligned} \tag{24}$$

Выводы

В работе рассмотрена возможность введения группы независимых «элементарных» функций на основе известных стандартных степенных рядов для функций $\sin x, \cos x, shx, chx$. При «перестраивании» степенных рядов введены четыре линейно независимые между собой функции, которые условно обозначены как six, inx, cox, osx и названы тригогиперболическими функциями. Эти функции выражаются через обычные тригонометрические и гиперболические функции взаимно однозначно. Для них рассмотрен весь спектр алгебраических возможностей. Получены алгебраические соотношения между новыми функциями, а также между новыми и прежними. Произведено аналитическое продолжение новых функций в комплексную плоскость и записаны основные соотношения для функций комплексного переменного.

Необычные соотношения в связи с введением новых функций делают теорию достаточно сложной, но перспективной. Математический аппарат в новых функциях имеет значительные ограничения в сравнении с обычными и требует определенной сноровки и опыта. Тем не менее, теория интересная и допускает обобщения и развития в область дифференциального и интегрального исчисления, а также дифференциальных уравнений. Свойства тригогиперболических функций позволяют в полной мере изучить класс уравнений, решаемых в квадратурах.

Что касается перспективы предложенной теории, то сразу отметим возможность ее практического применения в теории фазовых переходов и переходных процессов в электрических цепях. Эта возможность открывается благодаря уникальным свойствам введенных функций. Одним из специфических свойств является монотонный характер функций six, inx, cox, osx, а их разности $(six - inx), (cox - osx)$ дают ограниченные и периодические функции.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ / Кудрявцев Л.Д. – М. : Наука,1970. – Т. 2. – 571 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Изд. ФМЛ, 1956. – Т. 2. – 472 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – Москва : Наука, «ФМЛ» : 1972. – Т 2. – 795 с.
4. Гурса Э. Курс математического анализа / Гурса Э. – М. : Государственное технико-практическое издательство, 1933. – Т 1. – 368 с
5. Шведов И.А. Компактный курс анализа. Функции одной переменной / Шведов И.А. – Новосибирск : Новосибирский государственный университет, 2003. – 112 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики / Смирнов В.И. – Москва : Наука, 1974. – Т. 1. – 480 с.

Л.П. Мироненко

Тригогіперболічні функції та їх алгебраїчні властивості
У статті пропонується альтернативний варіант системи незалежних функцій. Нові функції взаємно одночасно виражаються через звичні тригонометричні і гіперболічні функції і тому названі тригогіперболічними функціями. Отримані співвідношення між новими функціями, а також між новими і традиційними функціями. Незвичність цих співвідношень робить теорію досить складною, але перспективною.

Статья поступила в редакцию 05.07.2010.